第六章　电路(current circuit)

❖§1恒定点路中的电场和电源

❖§2各种导体的导电机制

❖§3恒定电路计算

❖§4 暂态过程

❖§5交流电概述(Review of alternating currents)

❖§6三种理想元件的电压与电流的关系(Relation between voltage & current of three kinds of ideal elements)

- §7矢量图解法(Vector diagram method)
- §8交流电路的复数解法(Complex number method)
- §9交流电的功率(Alternating current power)
- §10谐振电路与Q值的意义(Resonance circuit)
- §11变压器原理
- §12三相交流电

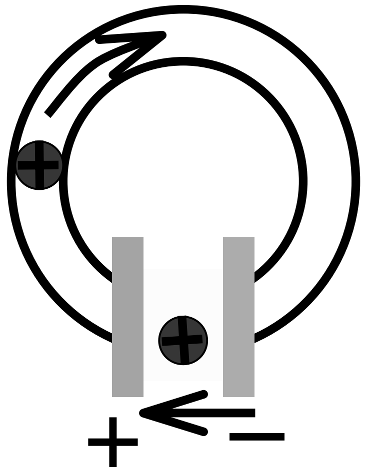
本章的基本要求

- 掌握运用欧姆定律（主要是一段含源电路的欧姆定律）和基尔霍夫定律求解电路的基本方法;
- 交流电路中交流电的三要素: 振幅 频率 初位相及交流电的瞬时值 有效值是交流电的基本概念, 应在理解的基础上牢固掌握;
- 各类元件（纯电阻 纯电感 纯电容）的电压 电流及元件电性能之间的位相关系是重点, 要牢固掌握;
- 掌握串, 并联电路的矢量图解法, 并能进行有关计算;
- 掌握复数解法, 了解电压复有效值, 电流复有效值及复阻抗的概念, 并能进行有关计算;
- 掌握交流电路的功率和功率因素的概念, 了解提高功率因素的方法;
- 了解串联谐振的特点与品质因素Q的意义;
- 掌握变压器中变换电压、电流、阻抗等关系式并能进行有关计算

§1恒定点路中的电源和电场

一、电源

电源内部电流从负极板到正极板叫内电路
电源外部电流从正极板到负极板叫外电路



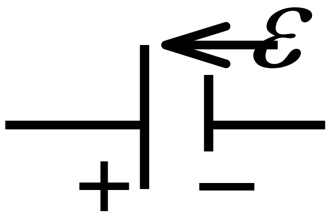
1、电源

在导体中有稳恒电流流动就不能单靠静电力，必须有非静电力把正电荷从负极板搬到正极板才能在导体两端维持有稳恒的电势差。这种能够提供非静电力的装置叫作电源。电源的作用是把其它形式的能量转变为电能。

静电力欲使正电荷从高电位到低电位。非静电力欲使正电荷从低电位到高电位。

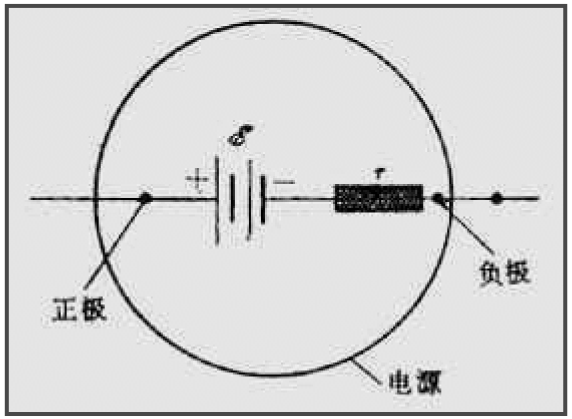
2、电源的种类

电解电池、蓄电池——化学能→电能
光电池 ——光能 →电能
发电机 ——机械能→电能



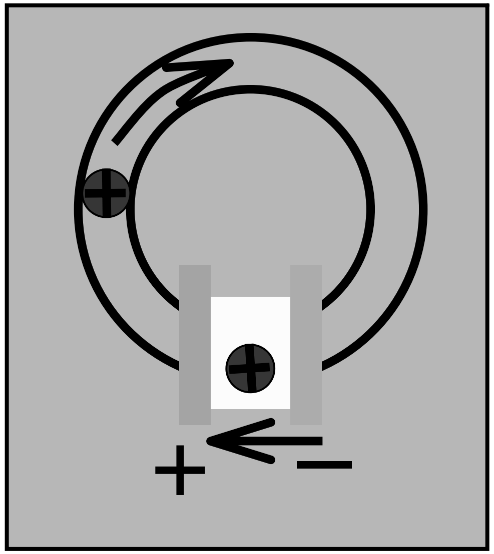
3、电源的表示法

电势高的地方为正极，电势低的地方为负极。



4、电动势

为了表述不同电源转化能量的能力，
引入了电源电动势这一物理量。



定义

把单位正电荷绕闭合回路一周时，电源非静电力做的功定义为电源的电动势。

$$\varepsilon = \frac{W}{q} = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

单位：焦耳/库仑=（伏特）

计算

因为电源外部没有非静电力，所以可写为：

$$\varepsilon = \int_{内} \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

电源电动势的大小等于把单位正电荷从负极经电源内部移到正极时非静电力所作的功。

说明:

- 电动势是标量，但有方向；其方向为电源内部电势升高的方向，即从负极经电源内部到正极的方向为电动势的方向。
- 电动势的大小只取决于电源本身的性质，而与外电路无关。
- 电动势的单位为伏特。
- 电源内部也有电阻，称为内阻。
- 电源两极之间的电势差称为路端电压，与电源的电动势是不同的。

二、恒定电路与电场

电流和电压分布不随时间而改变的电路，恒定条件为：

$$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=0$$

1、任何地方没有电荷积累，因此静电场的规律对恒定电场都适用。
2、恒定电场必须是闭合电路。

❖ §2各种导体的导电机制

一、经典金属电子论

金属导电的宏观规律是由它的微观结构和导电机制所决定的。下面我们从经典力学和经典统计学的角度对金属导电的二个规律作一个粗糙的解释。导体内无电场时，大量自由电子无规则热运动的统计结果是不形成宏观电流是;导体中加了电场以后，自由电子的总速度是由热运动速度和定向运动速度两部分速度组成。

自由电子平均定向运动速度（漂移速度）,不是对某一单个电子而言的，而是对大量电子求统计平均得到的物理量。例如，自由电子在稳恒电场作用下运动，与晶体点阵碰撞后，定向运动速度 $\vec{v}_0 = 0$ 。电子在两次碰撞之间的定向运动部分就是一个初速为零的匀加速直线运动（ $\bar{v}:10^5 m\cdot s^{-1};\ u:10^{-4\sim-5} m\cdot s^{-1}$ ）。

下面分三步找关系： $\vec{u}$ 与 $\vec{E}$； $\vec{j}$ 与 $\vec{u}$； $\vec{j}$ 与 $\vec{E}$

（1） $\vec{a} = -\dfrac{e\vec{E}}{m}$ $\vec{u}_f = \vec{a}\,\bar{\tau} = -\dfrac{e\vec{E}}{m}\bar{\tau}$ $\therefore \vec{u} = \dfrac{0+\vec{u}_f}{2} = -\dfrac{e\vec{E}}{2m}\bar{\tau}$

设两次碰撞之间的平均路程（平均自由程）为 $\bar{\lambda}$ 由于热运动平均速度 $\bar{v}$ 远大于定向平均速度 u ，故近似有，

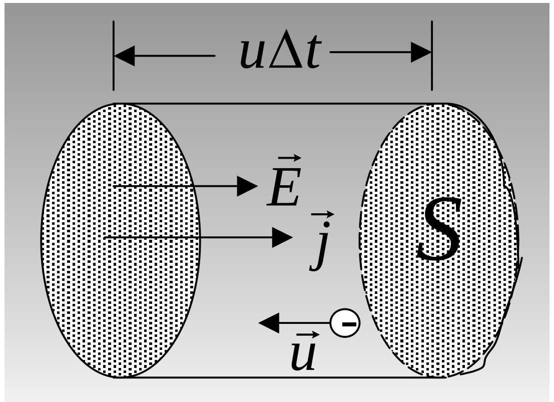
。

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} = -\frac{e}{2m}\cdot\frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}}\vec{E}$$

（2）设稳恒电流**I**沿轴线方向均匀流过圆柱形均匀导体**,**所有自由电子以同一平均定向速度**u**运动**,**单位体积中自由电子数为**n**，则该柱体内共有**nus**Δ**t**个自由电子，在时间Δ**t**内全部通过横截面**S**

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=neus \qquad j=\frac{I}{s}=neu \qquad \vec{j}=-ne\vec{u}$$

（3）由上面得到 $\vec{j}=\dfrac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}\vec{E}$ $\quad \sigma=\dfrac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}$



则 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ 此式反映了电流密度**j**与引起这一电流密度的外因（**E**）及内因

（σ）之间的关系，与欧姆定律**I=GU**

类似称为欧姆定律的微分形式，两种形式是等价的，彼此可以互推。

用上图：

$$E=\frac{j}{\sigma}\quad El=\frac{jl}{\sigma}=js\cdot\frac{l}{\sigma s}\rightarrow U=I\frac{l}{\sigma s}=I\rho\frac{l}{s}=IR\rightarrow U=IR$$

可见 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ 与欧姆定律（积分形式）对应

$\vec{j}=\sigma\vec{E}$ 称为欧姆定律的微分形式。

它的物理意义是：电荷的定向运动是电场作用的结果，导体中某点的电流密度j与该点的电场强度E成正比。这一规律虽然是用经典理论在特殊情况下推导出来的，但是理论和实验都证明，它对非稳恒情况的导体也成立。

用上图还可推出焦耳定律的微分形式 $p=\sigma E^2$

p 表示单位体积内释放的热功率称为热功率密度。

$$\sigma=\frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}} \quad \because \bar{v}\propto\sqrt{T} \quad \therefore \sigma\propto\frac{1}{\sqrt{T}}$$

从而 $\rho\propto\sqrt{T}$ 这说明了为什麽随着温度升高，金属的电导率减小，电阻率增加。由公式计算出的电导率的具体数值与实际相差甚远，此外，ρ 近似地与**T**成正比，所以上面的结果只能定性地说明金属导电的规律。

二、线性与非线性导电

三、气体导电（自学）

§3恒定电路计算

在实际电路中，经常把若干个具有一定电阻的导体以各种适当的方式连接起来使用，有时需要计算其等效电阻（或总电阻），“等效”的概念很重要，它是分析电路的一种方法。所谓等效（例如等效电阻、等效电路、等效电源）就是对于同样的外电路来说，它们所产生的电压和电流都相同！ 电阻的基本联结方式有两种：串联和并联。

它们的基本特点从三个方面去分析：（1）电流强度的特点；（2）电压的特点；（3）等效电阻。

可以证明：无论用电器如何联结，总功率永远等于各用电器功率之和。例如，对串联电路：

$$P=IU=I(U_1+U_2+\cdots U_n)=IU_1+IU_2+\cdots IU_n=P_1+P_2+\cdots P_n$$

对并联电路、对混联电路，结果也相同。

一. 一段含源电路的欧姆定律

把电源接到电路里，在一般情况下就会有电流 I 通过（平衡的补偿电路例外）。通过电源的电流方向有两种可能性：从负极到正极(放电)，或从正极到负极（充电）。在复杂电路中某个电源究竟在充电还是放电，往往难以一望而知，两种情形都可能出现。

现在我们来计算一个电源两端的电压（路端电压）。路端电压是静电力把单位正电荷从正极移到负极所作的功，即

$$U = U_+ - U_- = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l}$$ (这里路径是任意的)

我们选择积分路径通过电源内部，

由 $\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{K}\right)$ 得 $\vec{E} = -\vec{K} + \dfrac{\vec{j}}{\sigma}$

$$U = U_+ - U_- = -\int_{+\,(\text{电源内})}^{-} \vec{K}\cdot d\vec{l} + \int_{+\,(\text{电源内})}^{-} \frac{1}{\sigma}\vec{j}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{-\,(\text{电源内})}^{+} \vec{K}\cdot d\vec{l} - \int_{-\,(\text{电源内})}^{+} \rho j dl \cos\theta$$

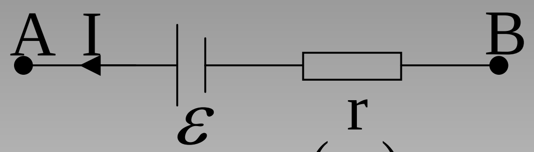
$$= \varepsilon - I\int_{-\,(\text{电源内})}^{+} (\pm 1)\frac{\rho dl}{S} \begin{pmatrix} \text{放电} & \theta = 0 \\ \text{充电} & \theta = \pi \end{pmatrix}$$

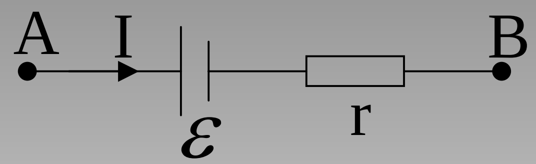
$$= \varepsilon \mp Ir$$

总结起来，电源的路端电压公式为：

$$\begin{cases} \text{放电} & U = U_+ - U_- = \varepsilon - Ir \\ \text{充电} & U = U_+ - U_- = \varepsilon + Ir \end{cases}$$

若电源的内阻r=0, 则无论电流有无或电流沿什麽方向，路端电压U总等于 ε ，即电压是恒定的。这样的电源叫做理想电压源。从以上充放电表达式可以看出，一个有内阻的实际电源等效于一个电动势为 ε 的理想电压源和一个阻值等于其内阻r的电阻串联，它的等效电路如下图所示：

放电 

充电 

$$U_{AB} = U(A) - U(B) = U_{+} - U_{-}$$

下面看能量转化情况：

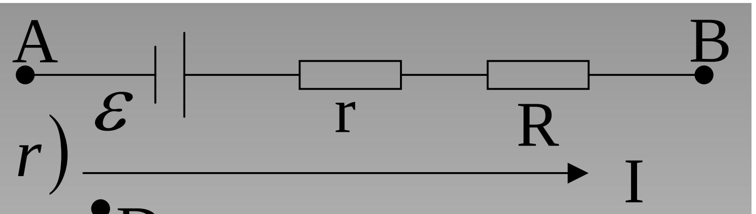
$$\begin{cases} \text{放电} UI = \varepsilon I - I^2 r, \text{或} \varepsilon I = UI + I^2 r \\ \text{充电} UI = \varepsilon I + I^2 r \end{cases}$$

两式中各项的物理意义：I^2r是内阻上消耗的热功率。在放电情形中εI是电源中非静电力提供的功率，它是靠消耗电源中非静电能得到的，UI是电源向外电路输出的功率；在充电情形中，UI是外电路输给电源的功率，εI 是抵抗电源中非静电力的功率，它转化为非静电能而储存于电源中。

所以放电时能量的转换过程是电源中的非静电能一部分输出到外电路中，一部分消耗在内电阻上转化为焦耳热；充电时能量的转换过程是外电路输入电源的能量一部分转化为非静电能由电源储存起来，一部分消耗在内阻上转化为焦耳热。

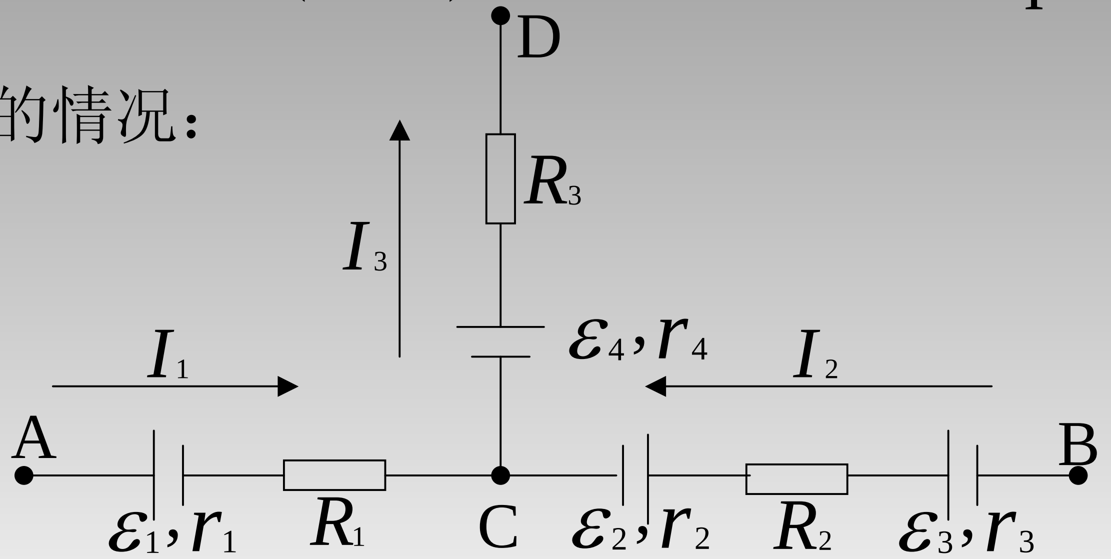
其次考虑一条支路情况，我们不再用 $\vec{j}=\sigma\left(\vec{E}+\vec{E}_K\right)$ 来推导，直接利用前面已得到的结果。$U_{AB}=U_A-U_B$， $U_{AB}>0$ 说明$U_A>U_B$，$U_{AB}<0$ 说明$U_A<U_B$，即是假若顺着AB方向，电势降落元件前面写“+”号，电势升高元件前面写“—”号。

先考虑一条支路的情况：



$$U_{AB}=-\varepsilon+Ir+IR=-\varepsilon+I\left(R+r\right)$$

再考虑一段电路的情况：



在AC支路上： $$U_{AC}=\varepsilon_1+I_1r_1+I_1R_1$$
在CB支路上 $$U_{CB}=-\varepsilon_2-I_2r_2-I_2R_2+\varepsilon_3-I_2r_3$$

$$\therefore \quad U_{AB}=U_{AC}+U_{CB}=(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3)+(I_1r_1+I_1R_1-I_2r_2-I_2R_3-I_2r_3)$$

写成一般形式： $U_{AB}=\sum(\pm\varepsilon)+\sum(\pm IR)$ 这就是一段含源电路欧姆定律的普遍形式。它的物理意义是：一段电路两端的电压等于该电路上各电源和各电阻上电压的代数和。

总结符号规则如下：

（1）电阻；当电流方向（或正方向）与绕行方向（电压脚标的顺序）一致时，IR前取正号，反之取负号(同向取正，反向取负)；

（2）电动势；沿绕行方向与电动势方向一致时，ε 前取负号，反之取正号（同向取正，反向取负）。

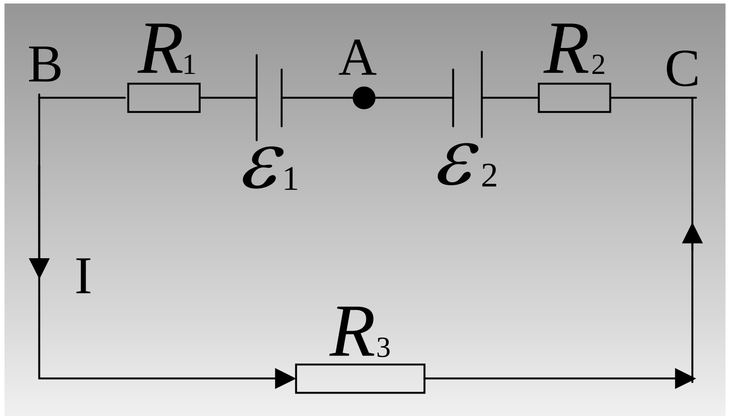
思考题：如果电路中任意两点a、b间的电压为零，是否可以肯定这段电路上电流为零？反之，如果a、b这一段电路上电流为零，是否可以肯定这两点间电压为零？（可用两个相同电源的正串和反串组成的闭合回路为例说明）

结论：由一段不含源电路上得到的结论，不能随便推广到一段含源电路上去。

例题：如图所示，已知 ε_1=**24V**，ε_2=**12V**，**R_1=2Ω**，**R_2=1Ω**，**R_3=3Ω**,求：

（**1**）电路中的电流；

（**2**）**A**、**B**、**C**相邻两点之间的电压，并作图表示电路中各部分的电位升降情况。



解：（1）设电路中电流I的正方向如图所示，从A点出发沿ABCA绕电路一周又回到A点，

$$U_A - U_A = -\varepsilon_1 + IR_1 + IR_3 + IR_2 + \varepsilon_2 = 0$$

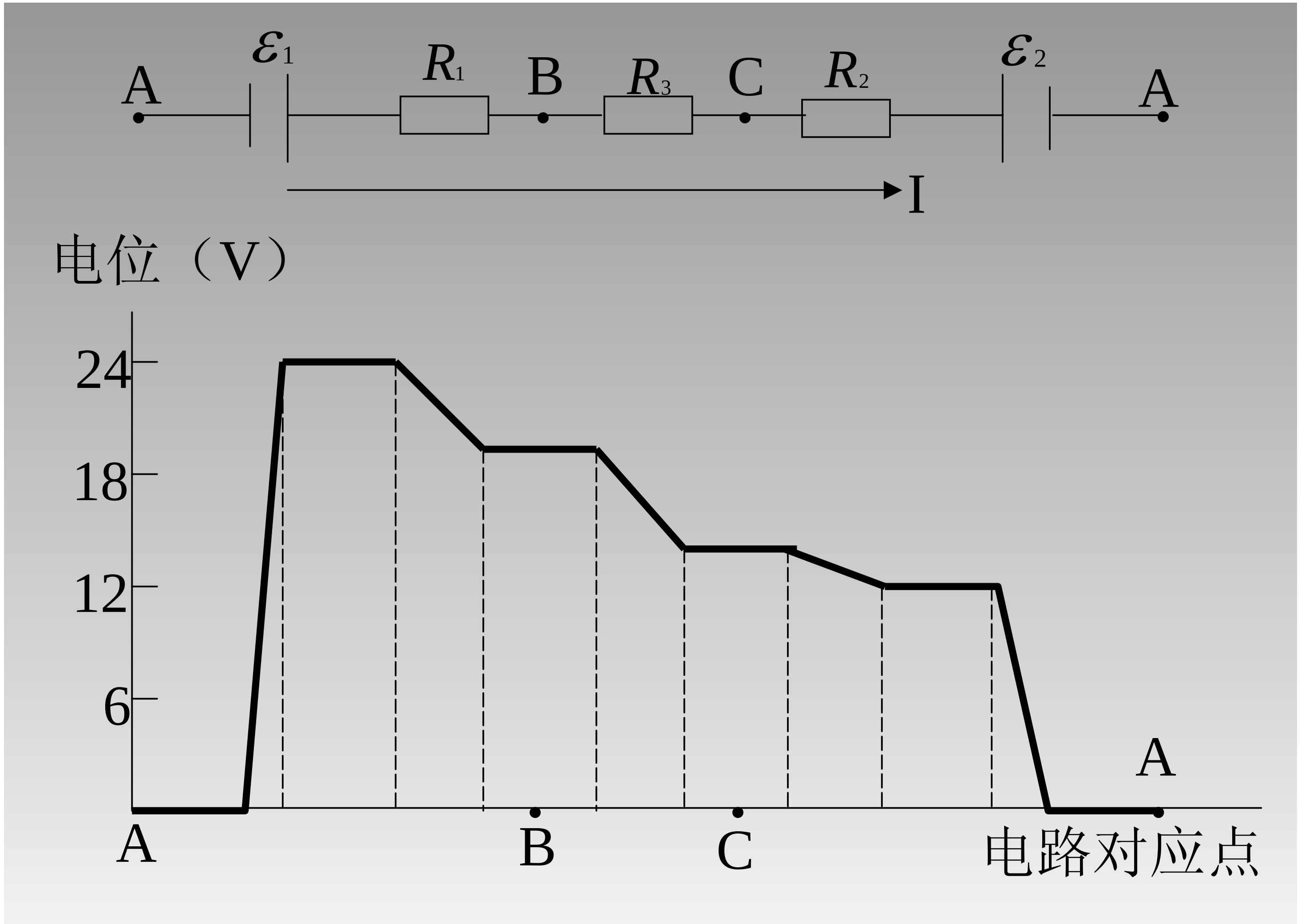
∴ $I = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 2A$，I >0，说明真实电流方向与所设正方向相同。

（2）$U_A - U_B = -\varepsilon_1 + IR_1 = -24 + 2\times 2 = -20V$；

$U_B - U_C = IR_3 = 2\times 3 = 6V$；

$U_C - U_A = IR_2 + \varepsilon_3 = 2\times 1 + 12 = 14V$。

A、B、C三点，A点电位最低，设A点电位为零，则电路中各部分的电位升降情况如下图所示



A
$\mathcal{E}_1$
R_1
B
R_3
C
R_2
$\mathcal{E}_2$
A
I
电位（V）
24
18
12
6
A
A
B
C
电路对应点

二、 基尔霍夫定律

引言:

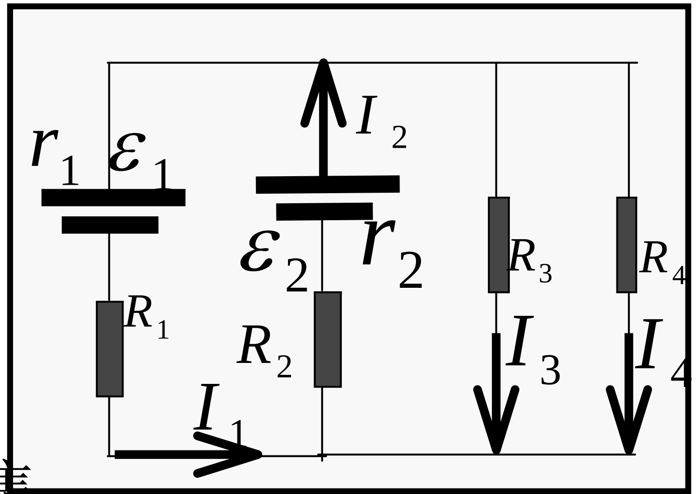
用欧姆定律只能处理一些简单电路的问题。而许多实际问题，其电阻的联接既不是并联，又不是串联，不能用欧姆定律进行计算。为了进行这类电路的运算，人们总结出了一些有效的方法，如等效发电机原理、叠加原理、三角形与星形变换原理等。本节我们介绍基尔霍夫定律，它包括两条定律。

基尔霍夫**Gustav Robert Kirchhoff，1824-1887**）

德国物理学家。他对物理学的贡献颇多。**1845**年提出电路的基尔霍夫定律，**1859**年与本生创立了光谱分析法；同年，在太阳吸收光谱线的研究中，他得出了热辐射的基尔霍夫定律，于**1862**年提出了绝对黑体的概念，这两者乃是开辟**20**世纪物理学新纪元的关键之一。

1.基尔霍夫第一定律——节点电流定律

几个概念

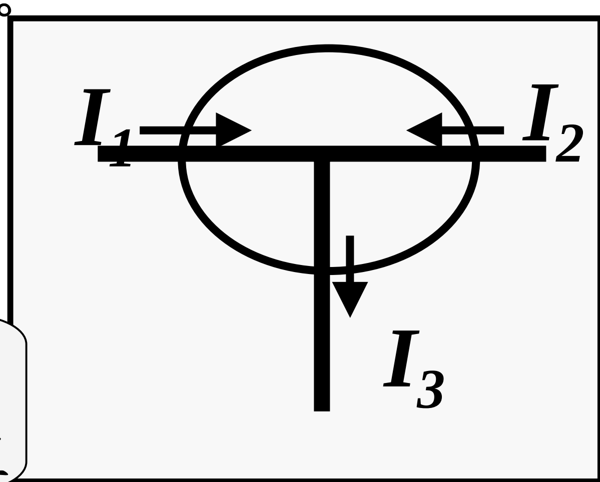


支路： 把任意一条电源和电阻串联的电路叫做支路

回路： 把 ***n***条支路构成的通路叫做回路

节点： 三条或更多条支路的汇集点叫做节点。

内容：通过节点电流的代数和为零。



因为 $$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=0$$

所以 $$\sum_i I_i = 0$$

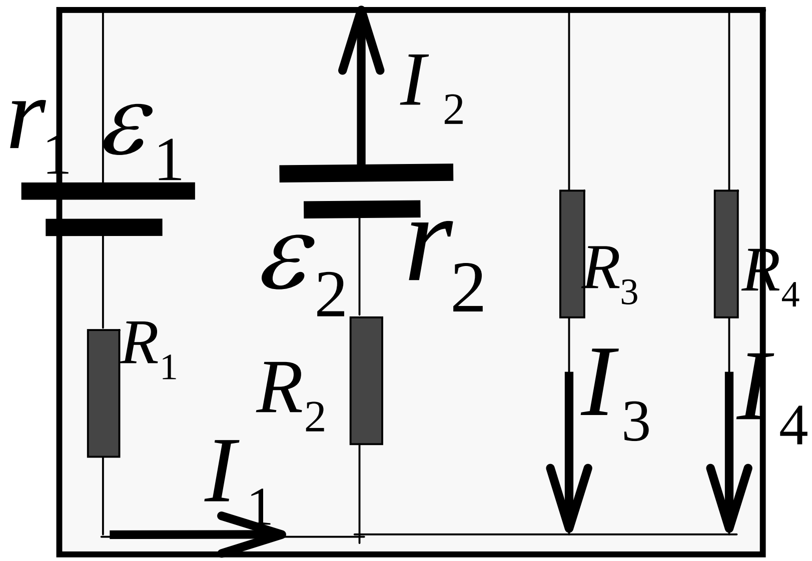
基尔霍夫第一方程组

说明:

•规定由节点流出的电流为正，

流入节点的电流为负；

•如果电路中有**m**个节点，则可得**m**个方程，其中只有**m-1**个方程是独立的；



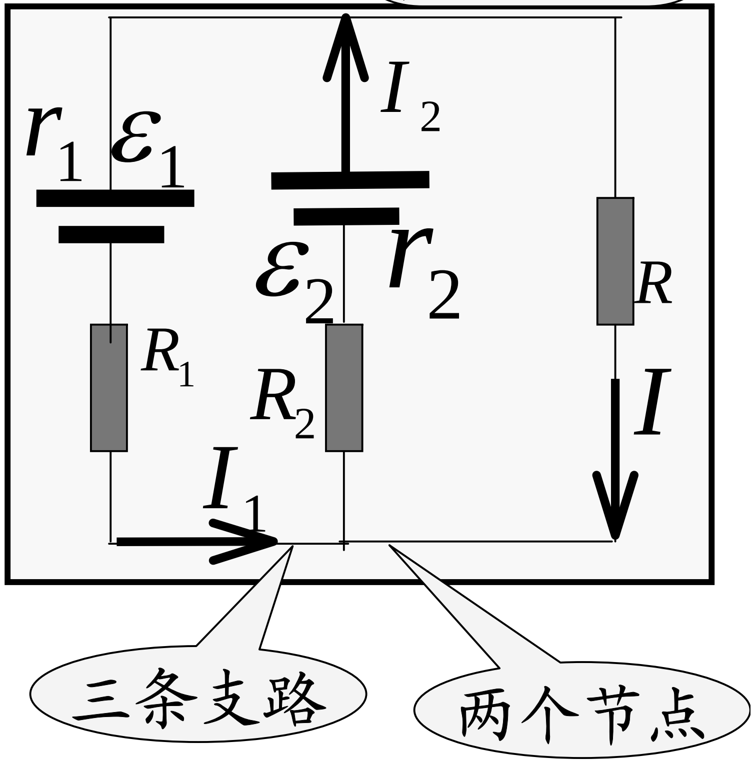
•如果电路中电流的方向难以确定，可以任意假定电流***I***的正方向，当计算结果***I*>0**时，表示电流的方向与假定的方向一致，当***I*<0**时，表示电流的方向与假定的方向相反。

2、基尔霍夫第二定律——回路电压方程

内容：任一回路电压降的代数和为零。

$$\sum IR + \sum \varepsilon = 0$$

基尔霍夫第二方程组



说明：

•在使用基尔霍夫第二定律时要先选定回路的绕行方向，在回路的绕行方向上，电势降为正值，电势升为负值；

•如果电路有***n***个回路，其中只有***n*-1**个回路方程是独立的；新选定的回路中，应该至少有一段电路是在以选过的回路中所未曾出现的，这样作得到的方程将是独立的。

•计算结果电流为正值，说明实际电流方向与图中所设相同；若电流为负值，表明实际电流方向与图中所设相反。

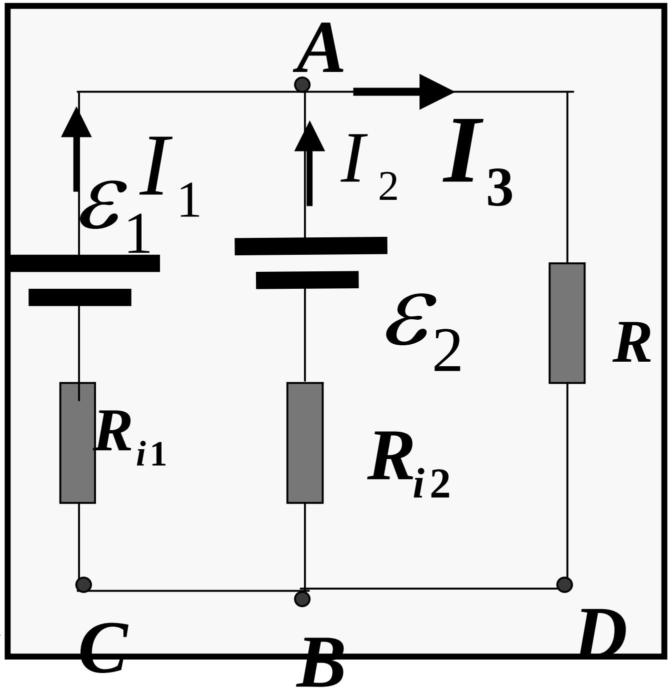
3、基尔霍夫定律的应用

应用中需要注意的问题：

1.独立方程数要和所求未知数相等；

2.每个支路的方向可以任意确定。

例**1**：如图所示，蓄电池的电动势分别为ε_1=**2.15V**和ε_2=**1.9V**，内阻分别为R_{i1}=**0.1Ω**和R_{i2}=**0.2Ω**，负载电阻为R=**2Ω**。问：**(1)**通过负载电阻和蓄电池的电流是多少？**(2)**两蓄电池的输出功率为多少？



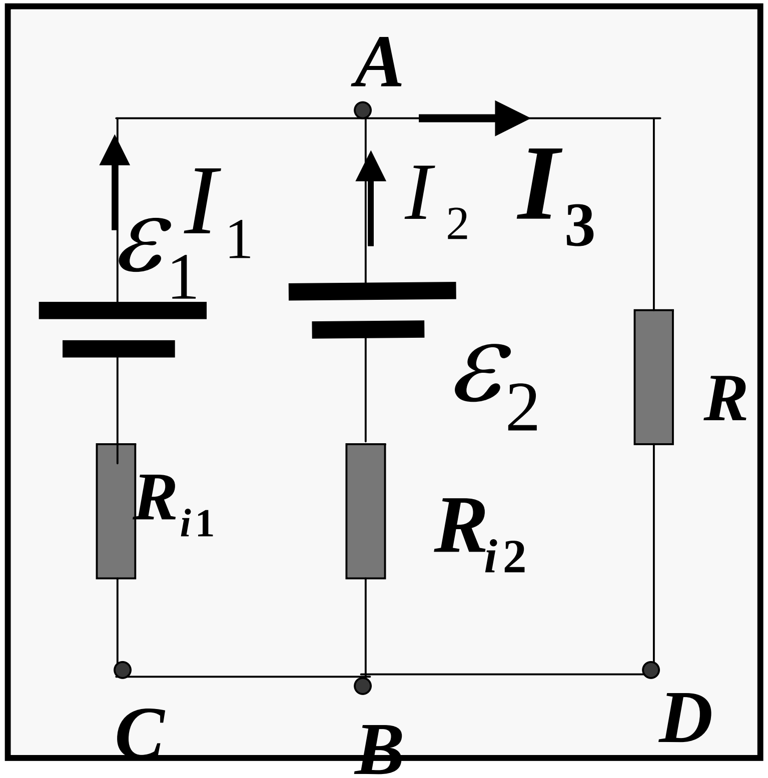
解：设I_1、I_2、I_3分别为通过蓄电池和负载电阻的电流，并设电流的流向如图所示。根据基尔霍夫第一定律，可以得到节点**A**的电流方程为

$$I_3 - I_1 - I_2 = 0$$

根据基尔霍夫第二定律，对回路**ABCA**和**ADBA**可分别得到电压方程，设回路的绕行方向为顺时针方向，则有

$$I_1 R_{i1} - I_2 R_{i2} - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$$

$$I_2 R_{i2} + I_3 R - \varepsilon_2 = 0$$



$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 0.1I_1 - 0.2I_2 = 0.25 \\ 0.2I_2 + 2I_3 = 1.9 \end{cases}$$

解此方程组，得

$$I_1 = 1.5A，I_2 = -0.5A，I_3 = 1A$$

负载电阻R两端的电势降为

$$U = I_3 R = 1\times 2 = 2V$$

蓄电池1的输出功率为

$$P_1 = I_1 U = 1.5\times 2 = 3W$$

蓄电池2的输出功率为

$$P_2 = I_2 U = -0.5\times 2 = -1W$$

消耗在负载电阻上的功率为

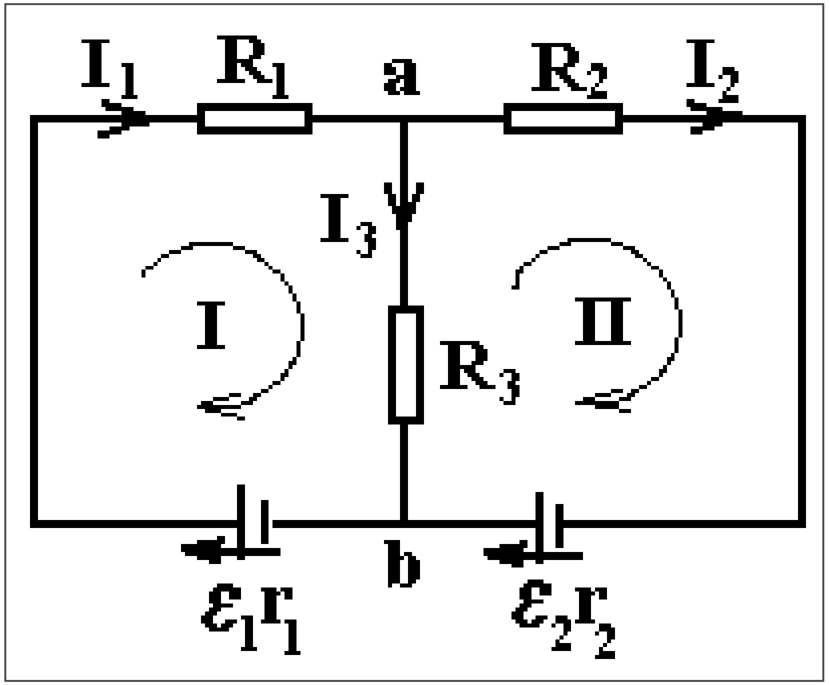
$$P_3 = I_3^2 R = 1^2\times 2 = 2W$$

讨论：蓄电池不仅没有输出功率，相反从外部获得了功率，处于被充电状态。由此可知，电动势值不同的几个蓄电池并联后供给负载的电流，并不一定比一个蓄电池大，有时电动势较小的蓄电池却变成了电路中的负载，在使用时应该尽量避免这种情况出现。

例2、如图电路:

ε_1=12V， ε_2=8V，
r_1=1Ω， r_2=0.5Ω，
R_1=3Ω，R_2=1.5Ω，
R_3=4Ω,

求通过每个电阻的电流强度.



【解】设通过电阻的电流分别为I_1、I_2、I_3,设回路I、II的方向如图。

对节点a:

$$-I_1+I_2+I_3=0\ldots\ldots（1）$$

对回路I:

$$-\varepsilon_1+I_1r_1+I_1R_1+I_3R_3=0\ldots\ldots（2）$$

对回路II:

$$-\varepsilon_2+I_2r_2+I_2R_2-I_3R_3=0\ldots\ldots（3）$$

解（1）（2）（3）的联立，得

$$I_1=1.25\ \mathrm{A}$$

$$I_2=-0.5\ \mathrm{A}$$

$$I_3=1.75\ \mathrm{A}$$

符号表示实际方向与所设的方向相反

§4 暂态过程

当一个含有线圈L或电容C的电路与电源接通或断开时，在由0突变到ε或由ε突变到0 的阶跃电压的作用下，由于L或C的存在，电路的电流或电压不会瞬间突变，而要经历一个从开始发生变化到逐渐趋于稳态的过程，这种过程称为暂态过程。或者说电路从一种稳态达到另一种稳态，需要经历一个过程，这种过程称为暂态过程。可表示为

初稳态 ⟶ 终稳态。暂态过程一般很短，但在这个过程中出现的现象却十分重要。

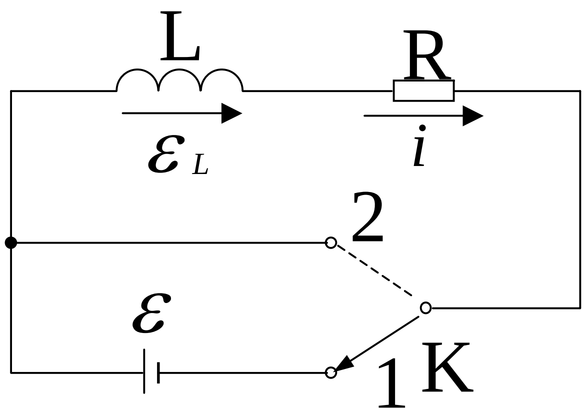
本节将研究暂态过程的特点和规律。

在暂态过程的讨论中，需要借助欧姆定律和基尔霍夫定律列出电路方程，这些在稳恒电流中成立的定律对于变化电流是否还成立呢？在第八章中将指出，当变化的电流满足“似稳条件”时，稳恒电流电路的各种规律仍适用，这里讨论的变化电流电路和第八章遇到的交流电路，似稳态条件均能很好的满足。

讨论暂态过程要涉及许多随时间变化的量，为明确区分它们，分别用小写字母表示随时间变化的量，用大写字母表示不随时间变化的量。

一、RL串联电路的暂态过程

RL电路与直流电源接通，如图所示，若把开关K拔向1时作为时间的起点（即t=0），我们感兴趣的是这一时刻后，电路中的电流随时间变化的规律，即想求出函数i（t）。



回路正方向如图所示，设电源的电动势为 ε，内阻为零，根据基耳霍夫定律，可得：

$$-\varepsilon + iR - \varepsilon_L = 0, \because \varepsilon_L = -L\frac{di}{dt}, \therefore L\frac{di}{dt} + Ri = \varepsilon.$$

这就是电路中变化着的瞬时电流i所满足的微分方程，它是一个一阶线性常系数非齐次方程，可用分离变量法求解。将上式写成：

$$\frac{di}{i - \frac{\varepsilon}{R}} = -\frac{R}{L}dt \quad ,$$

对上式两边积分，得：

$$\ln\left(i-\frac{\varepsilon}{R}\right)=-\frac{R}{L}t+K,\ \text{或}\ \ i-\frac{\varepsilon}{R}=K_1 e^{-\frac{R}{L}t},\left(K_1=e^{K}\right)$$

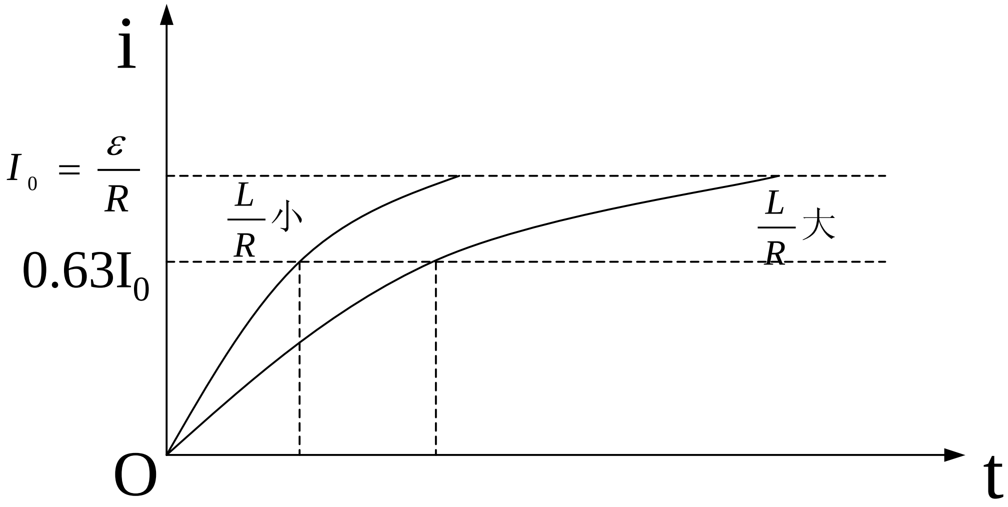
式中K_1为积分常数, 由t=0, $i_0=0$ 确定. 可得$K_1=-\frac{\varepsilon}{R}$

即解为 :$i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

根据得到的结果画出 $\frac{L}{R}$不同值时电流i随时间t变化的曲线，由图可看出，接通电源后，电流要经过一段指数式上升过程，最后达到稳定值 $I_0=\frac{\varepsilon}{R}$ 比值 $\frac{L}{R}$ 决定了电流i上升的快慢程度，它具有时间的量纲。通常令

$$\tau=\frac{L}{R}$$

称为RL电路的时间常数



从上式看出，τ 值大（即电路的L大、R小）电流增长慢，达到稳定值所需时间长；τ 值小（即L小，R大）电流增长快，达到稳定值所需时间短，所以它是标志RL电路中暂态过程持续时间长短的特征量。

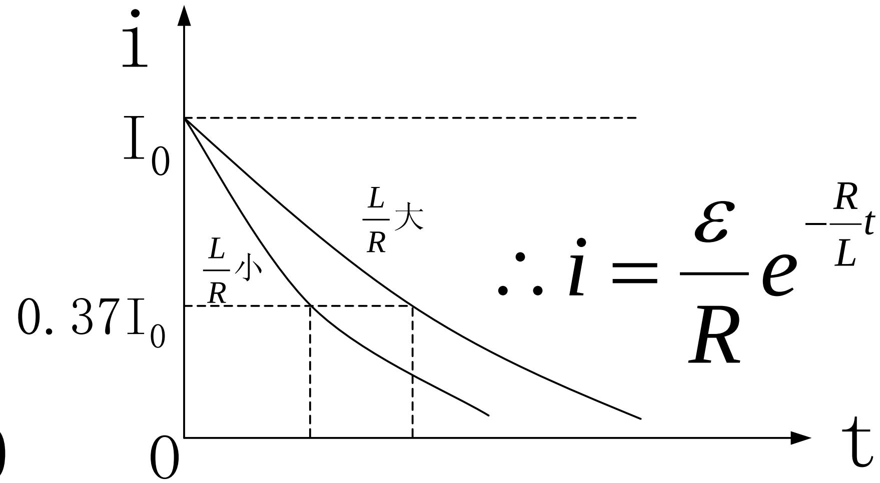
当 $t=\tau$ 时 $i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-1}\right)=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-0.37\right)=0.63I_0$

这就是说，τ等于电流从零增加到稳定值的63%所需的时间。当 $t=5\tau$ 时，可算出i=0.994I。，此时i已足够接近I。，故可认为暂态过程已结束。

通常的RL电路,τ 值极小（毫秒级或微秒级），所以只需经过极短的时间，即可认为暂态过程已经结束而达到稳态。暂态的全过程，电流从零达到稳定值，这是在线圈中建立磁场的过程，或者说是电源对线圈的充磁过程。

将开关由1很快拔向2，作用在LR电路上的阶跃电压从ε到0，这时按照欧姆定律，电流I所满足的微分方程为：

$$iR=\varepsilon_L,\ L\frac{di}{dt}+iR=0$$



$$\therefore i=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

将电源撤去时，电流下降也按指数递减，递减的快慢用同一时间常数 $\tau = \frac{L}{R}$ 来表征。

总之，LR电路在阶跃电压的作用下，电流不能突变，电流滞后一段时间才趋于稳定值，滞后的时间由时间常数标志。

二、RC电路的暂态过程

RC电路的暂态过程就是通过电阻对电容器充电或电容器通过电阻放电的过程。在电子线路（如脉冲、数字电路）中经常遇到。我们把讨论的重点放在求电容器电压随时间变化的规律上， 即求出函数u_c（t）.掌握了u_0（t）后，其它如电流、电量的变化规律就不难求得。

1、电容器充电方程

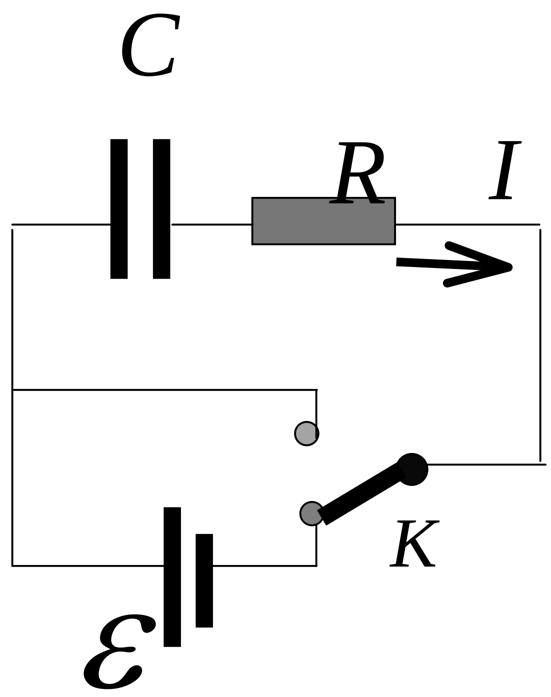
$$\oint_l dU = 0$$

$$IR + \frac{q}{C} - \varepsilon = 0$$

$$I = dq/dt$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} - \varepsilon = 0$$

一阶线性常系数非齐次微分方程



电量与时间的关系

$$\frac{dq}{q-C\varepsilon}=-\frac{dt}{RC}$$

$$\int_0^q \frac{dq}{q-C\varepsilon}=\int_0^t -\frac{dt}{RC}$$

$$q=C\varepsilon\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$q_0=C\varepsilon$ ——电容器电量极大值

$\tau=RC$ ——RC电路的时间常数

$$q=q_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

电流与时间的关系

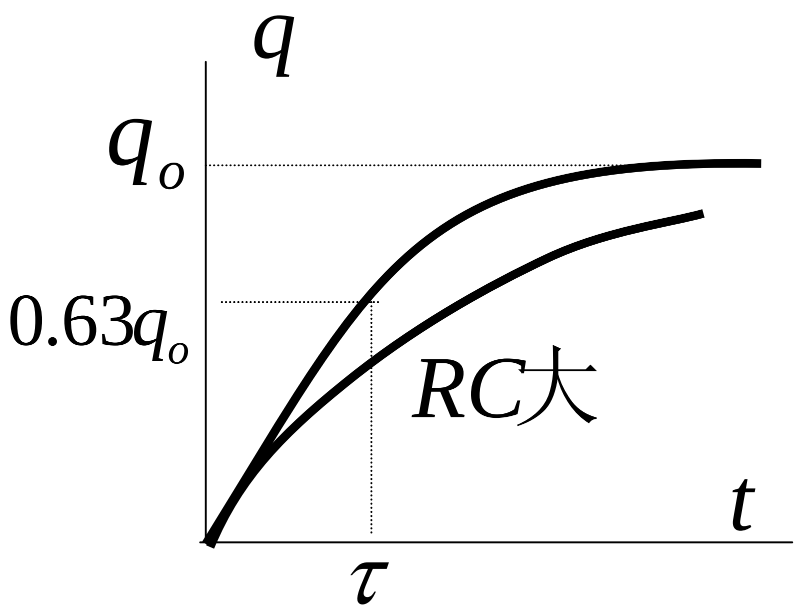
$$I=\frac{dq}{dt}=\frac{dq_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt}=\frac{q_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$I_0=\frac{\varepsilon}{R}$$

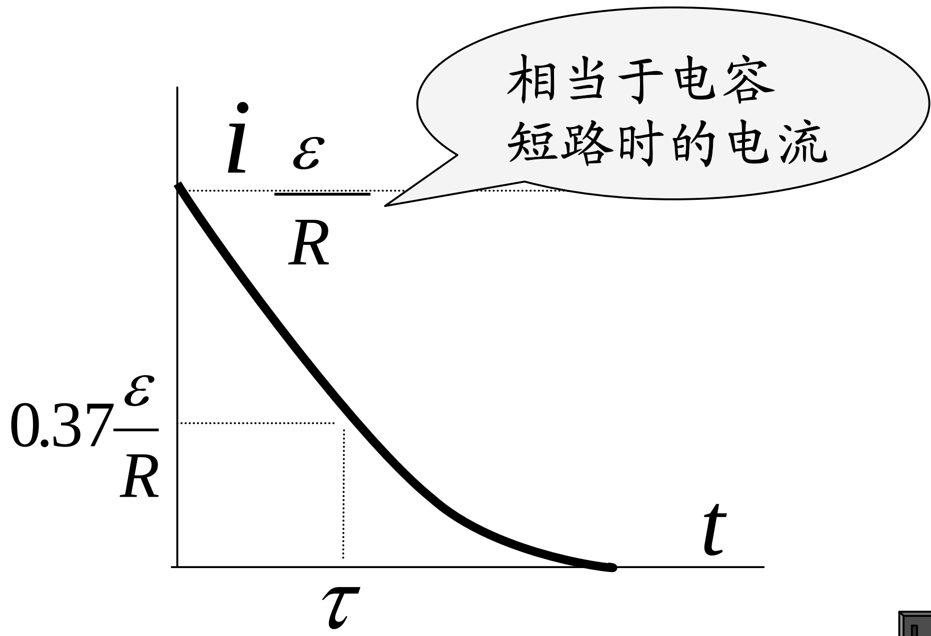
$$I=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电容器充电图形

$$q = q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



电压图形

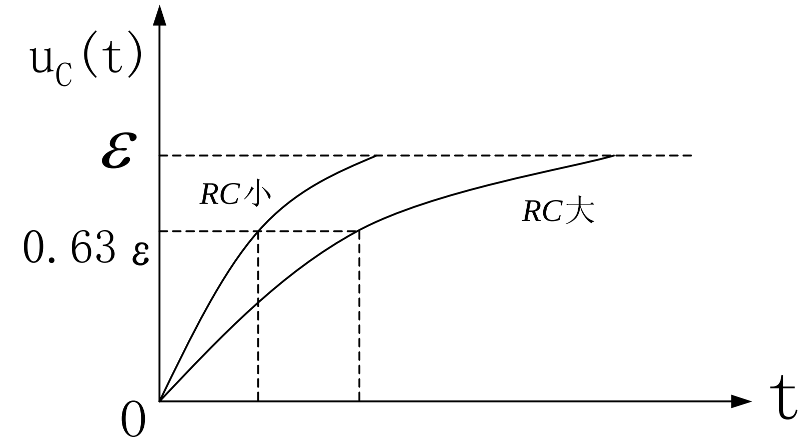
$$iR + u_c = 0,$$

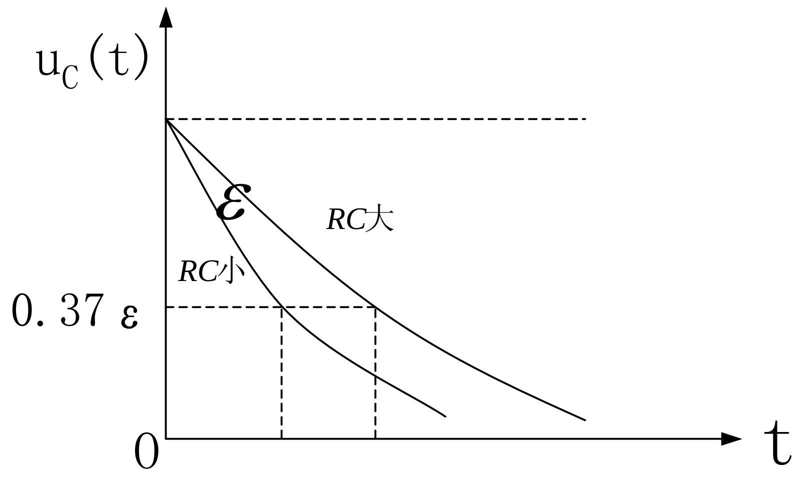
求得其通解为：$u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$

初始条件 $u_c(0) = \varepsilon$ ，

得， $A = \varepsilon$

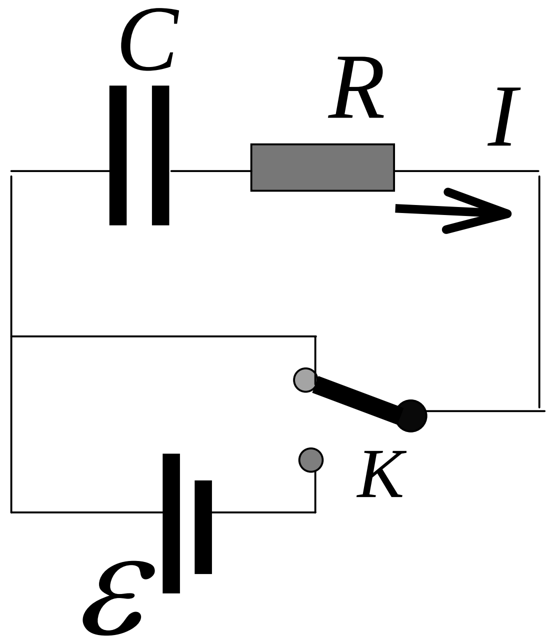
故得特解：$u_c(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}$





2、电容的放电

电容器放电方程



$$IR - \frac{q}{C} = 0$$

$$I = -dq/dt$$

$$R\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C}$$

一阶线性常系数齐次微分方程

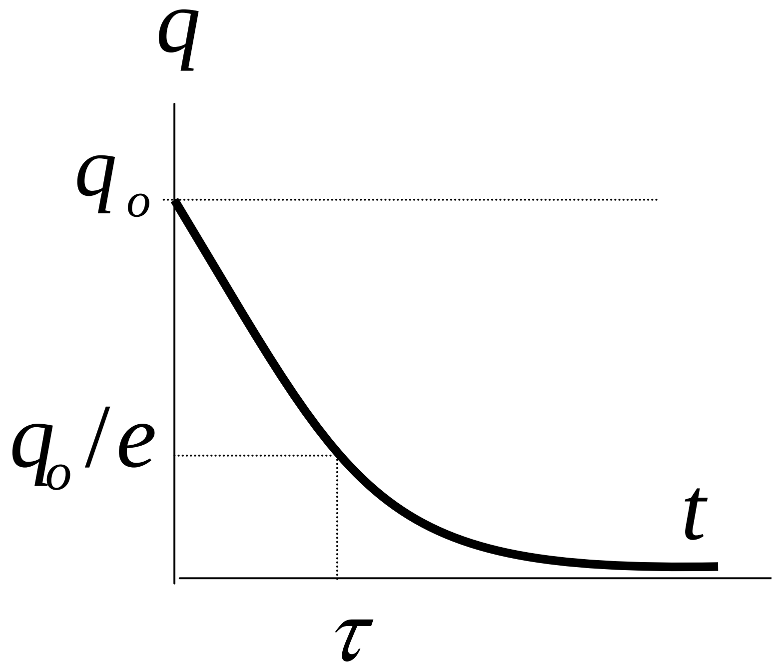
电量与时间的关系

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = \int_0^t -\frac{dt}{RC}$$

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电流与时间的关系

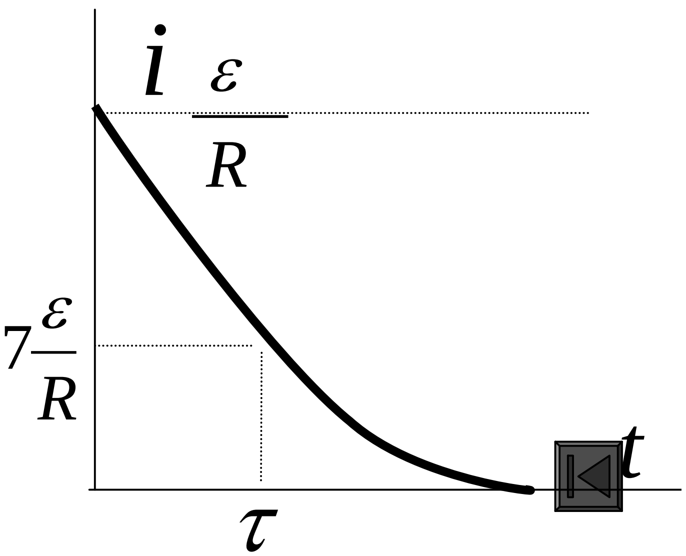


$$I=-\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}(q_0e^{-\frac{t}{\tau}})=\frac{q_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$I_0=\frac{q_0}{\tau}=\frac{q_0}{RC}$$

$$I=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电容器充电图形



- 这种缓慢变化的电场叫似稳电场。

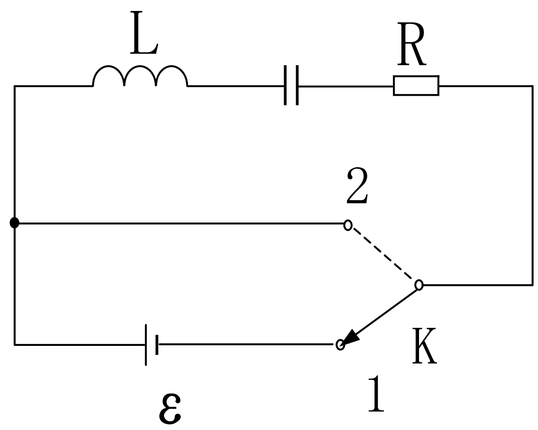
$\tau = RC$ 的值称为RC电路的时间常数。

$t = 5\tau$ 时，则充电过程实际上已基本结束。

综上所述，我们在研究暂态过程中要抓住两个要点：（1）微分方程；（2）初始条件。微分方程反映待求函数在整个暂态过程中所服从的物理规律；初始条件反映待求函数在开关拔动的瞬间所应满足的条件，对含有线圈的电路它可从“线圈电流不能突变”得出，对含有电容的电路可从“电容器电压不能突变”得出。

三、RLC电路的暂态过程

电路如图所示，与上述RC和LR电路类似。



这个电路的微分方程为：

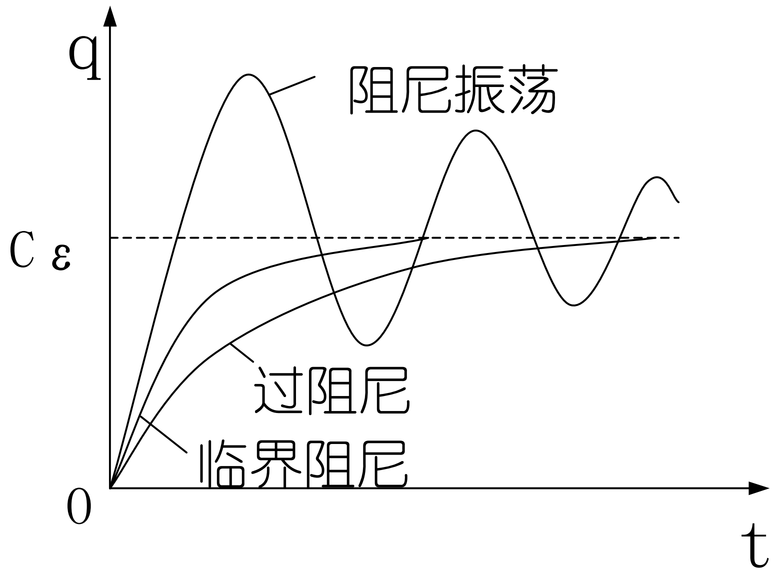
$$L\frac{di}{dt}+iR+\frac{q}{C}=\begin{cases}\varepsilon\left(K\text{接于 }1\right)\\0\left(K\text{接于 }2\right)\end{cases}$$

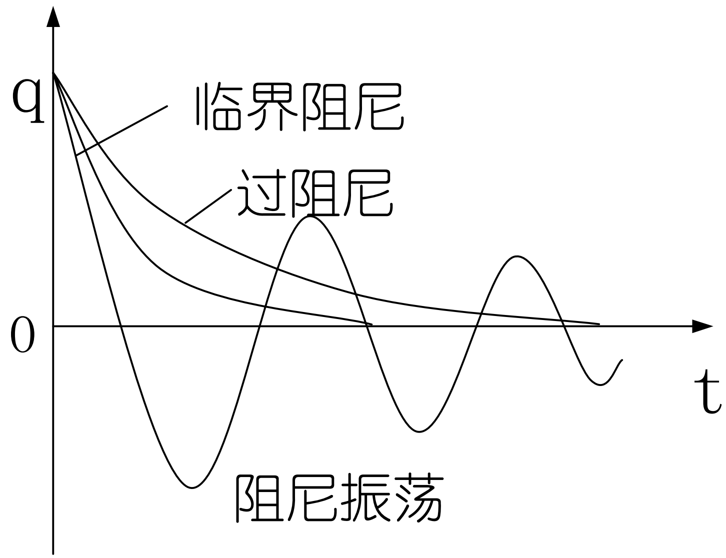
$$i=\frac{dq}{dt}\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\begin{cases}\varepsilon\\0\end{cases}$$

这是二阶线性常系数微分方程，方程式解的形

式与阻尼度 $\lambda=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ 有密切关系。

下图中三条曲线对应三种情形：分别称为过阻尼、临界阻尼和阻尼振荡。





下面我们着重从能量的角度定性讨论LCR电路放电过程的特点，说明过阻尼、临界阻尼和阻尼振荡的含义。

我们知道，电容和电感是储能元件，其中能量的转换是可逆的。而电阻是耗散性元件，其中电能单向地转化为热能。由于阻尼度是与电阻成正比，它的大小反映着电路中电磁能耗散的情况。

- 　首先我们看电路中**R=0**的情形，此时 **=0**。放电过程开始时，电容器中原来积累的电量减少，线圈中的电流增大，这时电容器中储存的静电能转化为电感元件中的磁能。当电容器中积累的电量放电完毕时，全部静电能转化为磁能以后，电路中的电流在自感电动势的推动下持续下去，使电容器反方向充电，于是，磁能又转化为电能。如此的过程反复进行下去，形成等幅振荡。振荡的频率和周期分别为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, T_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

它们分别称为电路的自由振荡频率和自由周期。

- 如果电路中的电阻不太大使得 $\lambda < \mathbf{1}$ ，每当电流通过电阻，便消耗一部分能量，振荡的振幅逐渐衰减，这便是阻尼振荡情形，其振荡频率和周期分别为：

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}},T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}.$$

当电阻增大时，振荡的周期增大，衰减的程度增加。

当电阻的数值达到一定的临界值，使得$\lambda=1$，由式可见周期趋于无穷大，表明衰减的过程不再具有周期性，这便是临界阻尼情形。

当电阻再大使得 $\lambda>1$时，放电过程进行的更缓慢，这便是过阻尼情形。

欧姆 (1789-1854)

乔治·西蒙·欧姆生于德国埃尔兰根城，父亲是锁匠。父亲自学了数学和物理方面的知识，并教给少年时期的欧姆，唤起了欧姆对科学的兴趣。16 岁时他进入埃尔兰根大学研究数学、 物 理 与哲学，由于经济困难，中途缀学，到1813年才完成博士学业。欧姆是一个很有天才和科学抱负的人，他长期担任中学教师，由于缺少资料和仪器，给他的研究工作带来不少困难，但他在孤独与困难的环境中始终坚持不懈地进行科学研究，自己动手制作仪器。

人们为纪念他，将测量电阻的物理量单位以欧姆的姓氏命名。

焦耳 (1818-1889)

十八世纪，人们对热的本质的研究走上了一条弯路，“热质说”在物理学史上统治了一百多年。虽然曾有一些科学家对这种错误理论产生过怀疑，但人们一直没有办法解决热和功的关系的问题，是英国自学成才的物理学家詹姆斯·普雷斯科特·焦耳为最终解决这一问题指出了道路。

焦耳1818年12月24日生于英国曼彻斯特，他的父亲是一个酿酒厂主。焦耳自幼跟随父亲参加酿酒劳动，没有受过正规的教育。青年时期，在别人的介绍下，焦耳认识了著名的化学家道尔顿。道尔顿给予了焦耳热情的教导。焦耳向他虚心学习了数学、哲学和化学，这些知识为焦耳后来的研究奠定了理论基础。而且道尔顿教诲了焦耳理论与实践相结合的科研方法，激发了焦耳对化学和物理的兴趣。